УДК 519.862.4

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОНКУРЕНЦИИ ДВУХ ФИРМ НА ОДНОРОДНОМ РЫНКЕ

Копылов А.В., Просвиров А.Э.
Волгоградский филиал Российского торгово-экономического университета, Волгоград

Рассмотрена экономико-математическая модель конкуренции двух фирм на однородном рынке сбыта. Приводится формулировка соответствующей задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, описывающей динамику развития системы, которая может быть легко обобщена на случай произвольного количества конкурирующих предприятий. Дана экономическая интерпретация полученных результатов.

Математическому моделированию процессов конкуренции и сотрудничества двух фирм на различных рынках посвящено довольно много научных работ, в основном использующих аппарат теории игр и статистических решений. В качестве примера можно привести работы таких исследователей, как Курно, Стакельберг, Бертран, Нэш, Парето, основные результаты которых приведены в [4].

В данной работе авторы предприняли взглянуть на эту задачу с точки зрения экономической динамики.

Следует отметить, что динамические дифференциальные модели уже давно и успешно используются для математического моделирования самых разнообразных по своей природе процессов. Достаточно упомянуть широко используюущуюся в экологии модель «хищник-жертва» Вольтера [2], математическую теорию развития эпидемий, модели боевых действий [1].

В качестве классических примеров дифференциальных моделей экономической динамики отметим модель Эванса установления равновесной цены на рынке одного товара, односекторную модель экономического роста Солоу [4], однопродуктовые динамические макроэкономические модели Леонтьева [3].

Задача решалась в следующей постановке.

На рынке однородного товара присутствуют две основные фирмы, разделяющие его между собой, т.е. имеет место классическая дуополия. Безусловно, это является весьма сильным предположением, однако оно вполне оправдано в тех случаях, когда доля продаж остальных конкурентов на рассматриваемом сегменте рынке пренебрежимо мала. Хорошим примером может служить отечественный рынок микропроцессоров, который по существу разделили между собой две фирмы: Intel и AMD.

Изменение объемов продаж конкурирующих фирм с течением времени описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dq_1(t)}{dt} = a_1 q_1(t)\left[N - \left(q_1(t) + q_2(t)\right)\right] - \\ - b_1 q_1(t) q_2(t) \\ \dfrac{dq_2(t)}{dt} = a_2 q_2(t)\left[N - \left(q_1(t) + q_2(t)\right)\right] - \\ - b_2 q_2(t) q_1(t) \end{cases} \qquad (1)$$

с начальными условиями

$$q_1(0) = q_{01}, \quad q_2(0) = q_{02} \qquad (2)$$

Здесь и далее использованы следующие обозначения:

$q_1(t)$-объем продаж фирмы I;

$q_2(t)$-объем продаж фирмы II;

N - объем рассматриваемого сегмента рынка сбыта;

a_1, b_1, a_2, b_2 -положительные коэффициенты, характеризующие степень влияния различных факторов на изменения объема продаж первой и второй фирмы соответственно.

Уравнения (1) получены из следующих самых общих соображений.

С достаточным основанием можно утверждать, что скорость изменения объемов продаж фирм со временем задается формулами:

$$\begin{cases} \dfrac{dq_1(t)}{dt} = A_1 - B_{12} \\ \dfrac{dq_2(t)}{dt} = A_2 - B_{21} \end{cases}, \qquad (3)$$

где A_i и B_{ij} являются в общем случае функциями q_i.

Задача теперь состоит в определении вида зависимостей $A_i = A_i(q)$ и $B_{ij} = B_{ij}(q)$.

Функция $A_i(q)$ описывает влияние *внутренней среды* предприятия на рост объема продаж и может быть с учетом логистической поправки записана в виде [2]:

$$A_i(q) = a_i q_i \left[N - (q_i + q_j)\right] \qquad (4)$$

Заметим, что здесь учтен тот факт, что суммарный объем продаж двух фирм $q_i + q_j$ не может превышать *N*.

Слагаемое $B_{ij}(q)$ выражает влияние *внешней среды* предприятия на рост объема продаж и учитывает уменьшение объема продаж *i*-ой фирмы за счет роста продаж *j*-ой: $b_i q_i q_j$.

В результате подобных рассуждений удается построить систему дифференциальных уравнений (1)-(2), которая тривиально обобщается на случай произвольного количества конкурирующих предприятий.

Для удобства дальнейшего исследования введем в рассмотрение безразмерные переменные:

$t = a_1 N t$ — безразмерное время, (5)

$y_i = \dfrac{q_i}{N}$ — безразмерный объем продаж *i*-ой фирмы *(i=1,2)*.

После этого модель задачи приобретает вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1(t)}{dt} = y_1(t)\left[1 - \left(y_1(t) + y_2(t)\right)\right] - \\ -\dfrac{b_1}{a_1} y_1(t) y_2(t) \\ \dfrac{dy_2(t)}{dt} = \dfrac{a_2}{a_1} y_2(t)\left[1 - \left(y_1(t) + y_2(t)\right)\right] - \\ -\dfrac{b_2}{a_1} y_1(t) y_2(t) \end{cases} \qquad (6)$$

Начальные условия приобретают вид:

$$y_1(0) = y_{01}, \quad y_2(0) = y_{02} \qquad (7)$$

Таким образом, мы приходим к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (6)-(7), представляющей собой основу для математического моделирования рассматриваемого процесса.

Система (6)-(7) интегрировалась численно на ПЭВМ для широкого диапазона параметров и начальных условий с использованием стандартного алгоритма Рунге-Кутта четвертого порядка [5], реализованного в среде разработки VBA для пакета MS Office 2002 XP.

Некоторые полученные результаты приведены ниже в виде графиков зависимости безразмерных объемов продаж фирм y_1 и y_2 от безразмерного времени t на рис. 1-3. На всех графиках по горизонтальной оси отложена величина t, а по вертикальной оси— y_1 и y_2.

Рис.1. соответствует ситуации, когда на рынке присутствует только фирма I, т.е. имеет место классическая монополия. Система (1) в этом случае вырождается в задачу Коши для одного уравнения

$$\frac{dq_1(t)}{dt} = a_1 q_1(t)\left[N - q_1(t)\right], \; q_1(0) = q_{01} \qquad (8)$$

или в безразмерном виде

$$\frac{dy_1(t)}{dt} = y_1(t)\left[1 - y_1(t)\right], \; y_1(0) = y_{01} \qquad (9)$$

Задача (9) допускает аналитическое решение в виде:

$$y_1(t) = \frac{y_{01}}{y_{01} - (y_{01} - 1)\exp(-t)} \;, \qquad (10)$$

причем $\lim\limits_{\tau \to \infty} y_1(t) = 1$, что полностью согласуется с тем очевидным фактом, что рано или поздно фирма-монополист будет целиком контролировать рассматриваемый сегмент рынка сбыта.

Выражение (10) представляет собой уравнение хорошо известной логистической кривой [3], которая и представлена на рис. 1.

Рис. 2. иллюстрирует динамику процесса раздела рынка между двумя фирмами в том случае, когда их взаимным противодействием, учитываемым посредством коэффициентов b_1, b_2, можно пренебречь. Это соответствует ситуации, когда влиянием внешней среды предприятий на рост объемов продаж можно пренебречь по сравнению с влиянием внутренней среды. В этом случае единственным внешним фактором, ограничивающим увеличение объемов продаж, является изначальная ограниченность рынка сбыта.

Рис 3. соответствует наиболее общему случаю, когда в полной мере учитываются как внутренние, так и внешние факторы, определяющие развитие обоих предприятий.

Обращает на себя внимание тот факт, что при прочих равных условиях в конечном итоге в выигрыше оказывается фирма с бо’льшим значением коэффициента a_i и с ме’ньшим значением коэффициента b_i.

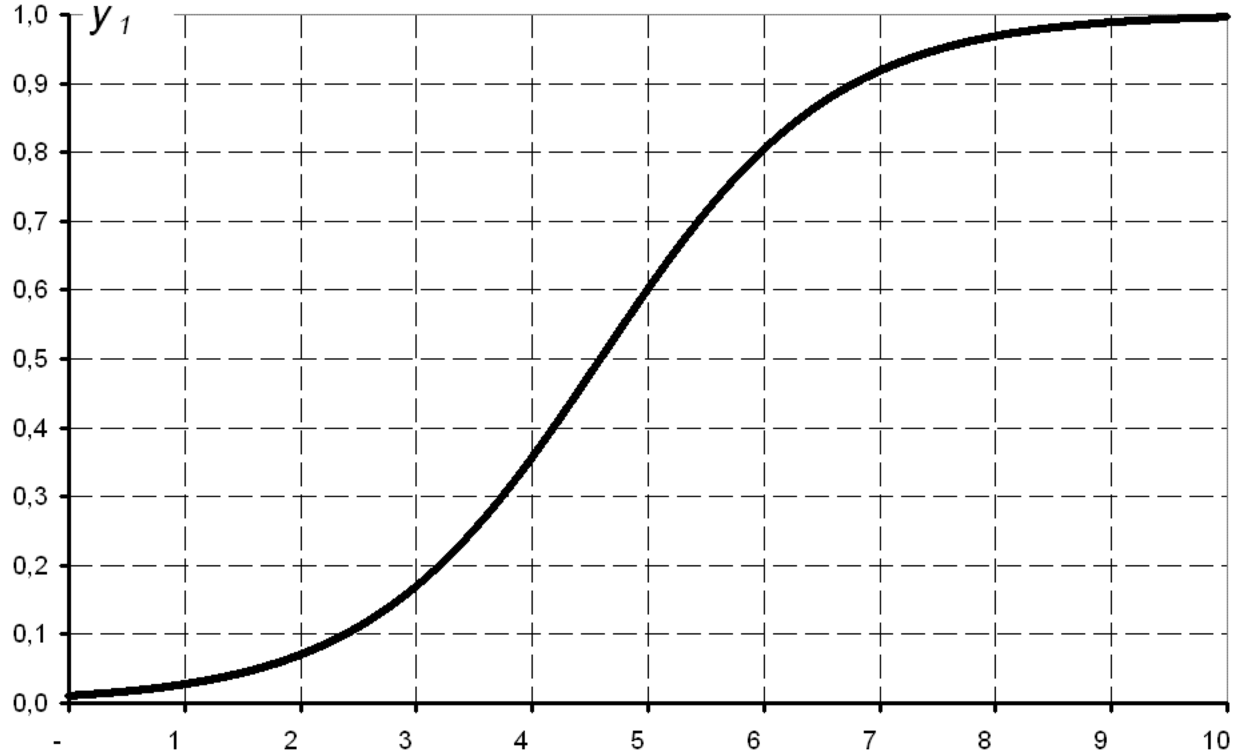

Рис. 1. Динамика изменения объемов продаж при $a_1 = 0{,}5;\ a_2 = b_1 = b_2 = 0;$,
$y_1(0) = 0{,}01, \quad y_2(0) = 0{,}00$.

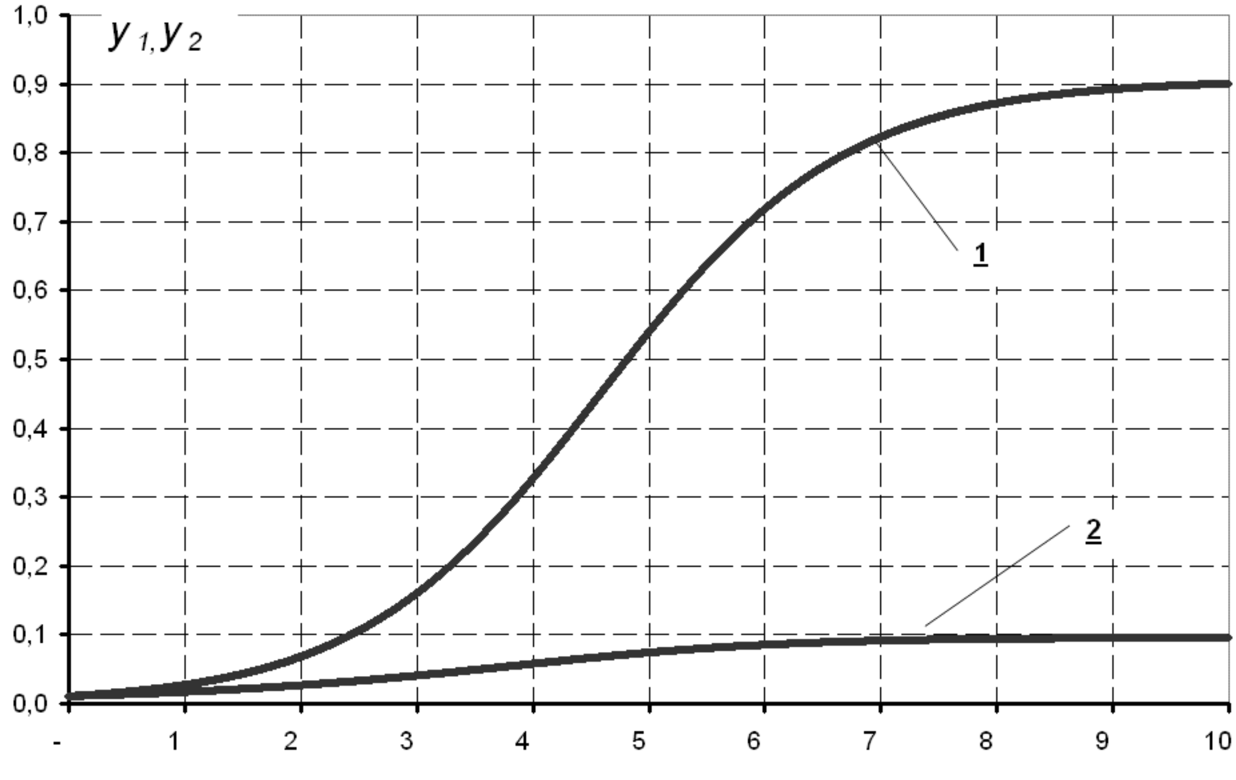

Рис. 2. Динамика изменения объемов продаж при $\frac{a_2}{a_1} = 0{,}5;\ \frac{b_1}{a_1} = 0{,}0;\ \frac{b_2}{a_1} = 0{,}0$,
$y_1(0) = 0{,}01, \quad y_2(0) = 0{,}01$.

Следует также отметить, что зависимости $y_1(t)$ и $y_2(t)$ имеют принципиально нелинейный характер, переживая «взлеты» и «падения», о чем особенно наглядно свидетельствует рис. 3.

Анализ полученных результатов позволяет сделать вывод о том, что, несмотря на некоторую абстрактность, данная модель в целом адекватно отражает основные закономерности развития рассматриваемой ситуации, и использованные для ее построения принципы могут быть с успехом применены для математического описания динамики развития различных экономических систем.

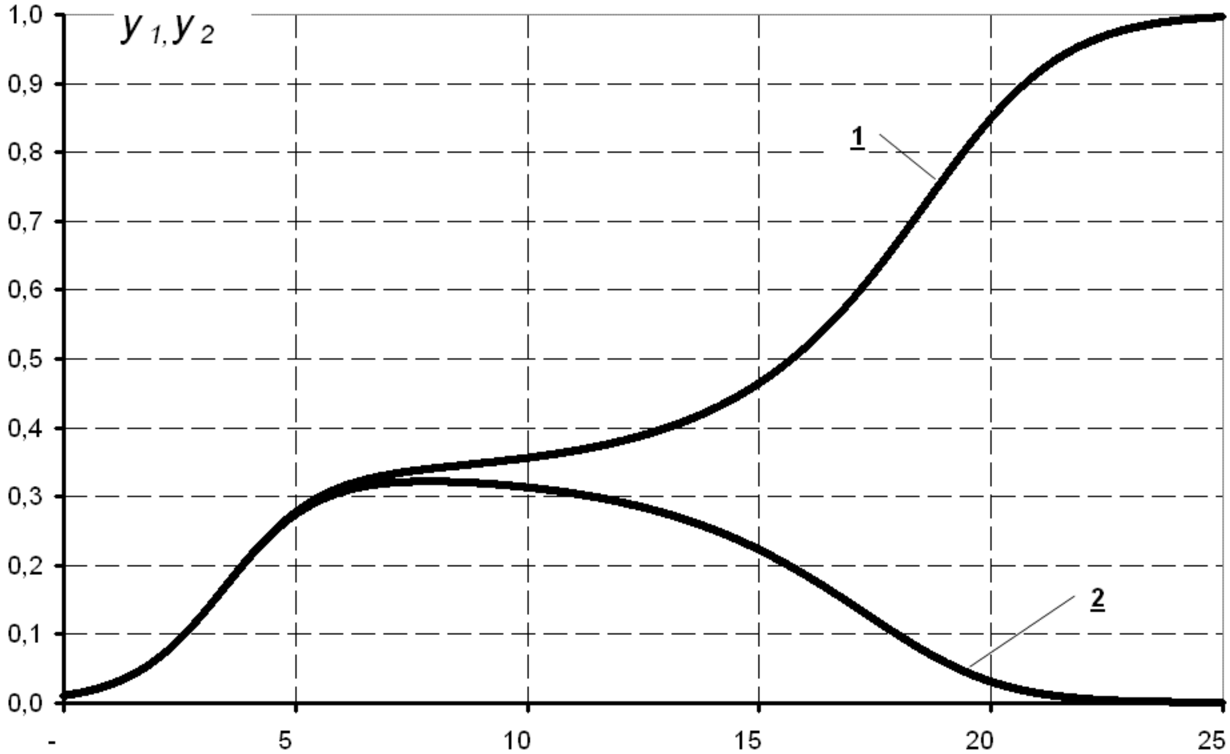

Рис. 3. Динамика изменения объемов продаж при $\frac{a_2}{a_1} = 1{,}000$; $\frac{b_1}{a_1} = 0{,}984$; $\frac{b_2}{a_1} = 1{,}000$, $y_1(0) = 0{,}01$, $y_2(0) = 0{,}01$.

Литература

1. Coleman C.S. Combat models//Differential equation models.—New York e.a., 1983.—P. 109-131.
2. Murray J. D. Some simple mathematical models in ecology// Math. Spectrum.—1983-1984.—V. 16, №2.—P. 48.-54.
3. Бережной Л.И.. Теория оптимального управления экономическими системами: Учебное пособие.- СПб.:ИВЭСЭП, Знание,2002.—64 с.
4. Малыхин В.И.. Математическое моделирование экономики. М., УРАО, 1998.—160 с.
5. Мудров А.Е. Численные методы для ПЭВМ на языках Бейсик, Фортран и Паскаль.—Томск: МП «Раско», 1991.—272 с,: ил.

Dynamic model of a competition of two firms in the homogeneous market

A.V. Kopilov, A.E. Prosvirov

The economic-mathematical model of a competition of two firms in the homogeneous market of selling is considered. The formulation of the appropriate task Koshy for system of the ordinary differential equations of the first order describing dynamics of development of system is resulted which can be easily generalized on a case of any quantity of the competing enterprises. The economic interpretation of the received results is given.