

УДК 538.4

КОНВЕКЦИЯ СМЕСЕЙ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Тактаров Н.Г.

Саранский кооперативный институт, Саранск, Россия

Получены уравнения конвекции и конвективной диффузии двухкомпонентных смесей в магнитном поле. Исследованы различные частные случаи. Решена задача о конвективном движении смеси вблизи вертикальной пластины, на поверхности которой происходит гетерогенная химическая реакция. Библиогр. 4 назв.

1. Вывод уравнений конвекции намагничивающихся смесей. Уравнения движения двухкомпонентных неэлектропроводных смесей в магнитном поле имеют вид [2,3]:

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\bar{v}}{dt} &= -\nabla p + \eta \Delta \bar{v} + \left(\frac{\eta}{3} + \zeta \right) \nabla \operatorname{div} \bar{v} + \frac{\mu}{4\pi} (\bar{H} \nabla) \bar{H} + \\ &+ \rho \bar{g}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \bar{v} &= 0, \quad \rho \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \bar{v} \nabla c \right) = -\operatorname{div} \bar{I}, \\ T \left[\frac{\partial r S_m}{\partial t} + \nabla (r S_m \bar{v}) \right] &= -\operatorname{div} \bar{q} + (x_1 - x_2) \operatorname{div} \bar{I}, \\ \operatorname{rot} \bar{H} &= 0, \quad \operatorname{div} \mu \bar{H} = 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь \bar{v} - скорость смеси, ρ - плотность смеси, c - концентрация первого компонента ($c = r_1/r_2$), S_m - энтропия единицы массы смеси, T - температура, x_1 и x_2 - химические потенциалы единицы массы для первого и второго компонентов соответственно, p - давление смеси, h и z - коэффициенты вязкости смеси, \bar{q} - вектор потока тепла, \bar{I} - вектор потока диффузии первого компонента, $m = m(r, c, T, \bar{H})$ - магнитная проницаемость смеси, \bar{H} - магнитное поле, \bar{g} - ускорение свободного падения. Имея в виду вывод уравнений конвекции, вязкой диссипацией в уравнении притока тепла пренебрегаем [1]. Давление p в уравнении (1.1) записывается в виде:

$$p = P + \frac{1}{4p} \int_0^H \left[m - r \left(\frac{\partial m}{\partial r} \right)_{c, T, H} \right] \bar{H} d\bar{H}, \quad (1.2)$$

где P - давление в отсутствие магнитного поля при заданных значениях плотности, температуры и концентрации. Выражение для потоков \bar{I} и \bar{q} [1,2]:

$$\begin{aligned} \bar{I} &= TL_{11} \nabla (x_1 - x_2) + TL_{12} \nabla T, \\ \bar{q} &= T^2 L_{21} \nabla (x_1 - x_2) + T^2 L_{22} \nabla T + (x_1 - x_2) \bar{I}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь $L_{ab}(\bar{H}) = L_{ba}(-\bar{H})$ - кинетические коэффициенты, связанные между собой соотношениями взаимности Онзагера.

Запишем тождество Гиббса для намагничивающихся смесей [2]:

$$d\tilde{G}_m = -S_m dT + x dc + \frac{1}{r} dp - \frac{m\bar{H}}{4pr} d\bar{H}. \quad (1.4)$$

Здесь \tilde{G}_m - потенциал Гиббса, приходящийся на единицу массы среды, $x = x_1 - x_2$; в качестве независимых термодинамических переменных в тождестве (1.4) выбраны c, p, T, \bar{H} . Выражение для $\nabla x(c, p, T, \bar{H})$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \nabla x &= \left(\frac{\partial x}{\partial c} \right)_{p, T, H} \nabla c + \left(\frac{\partial x}{\partial T} \right)_{p, c, H} \nabla T + \\ &+ \left(\frac{\partial x}{\partial p} \right)_{c, T, H} \nabla p + \left(\frac{\partial x}{\partial \bar{H}} \right)_{c, p, T} \nabla \bar{H}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь $H = |\bar{H}|$; среда предполагается изотропной.

Далее ограничимся случаем несжимаемой среды, уравнение неразрывности будем писать в виде $\operatorname{div} \bar{v} = 0$. Из первой формулы (1.1) следует, что в состоянии равновесия выполняется условие:

$$\nabla p = \frac{1}{4\pi} \mu (\bar{H} \nabla) \bar{H} + \rho \bar{g}. \quad (1.6)$$

Подставляя формулу (1.6) в (1.5) будем иметь:

$$\begin{aligned} \nabla x &= x_c \nabla c + x_T \nabla T - \frac{1}{8pr_0} m_c \nabla H^2 - \\ &- \frac{1}{r_0} r_c \bar{g}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь $m = m(c, p, T, H)$; $x_c = (\partial x / \partial c)_{p, T, H}$; $x_T = (\partial x / \partial T)_{c, p, H}$; $m_c = (\partial m / \partial c)_{p, T, H}$; $r_c = (\partial r / \partial c)_{p, T, H}$.

Аналогично (1.7) записывается уравнение для энтропии:

$$\nabla S_m = -x_T \nabla c + \frac{I}{T_0} \nabla T + \frac{m_T}{8pr_0} \nabla H^2 + \frac{r_T}{r_0} \bar{g}. \quad (1.8)$$

Здесь $r_T = (\partial r / \partial T)_{c,p,H}$; $m_T = (\partial m / \partial T)_{c,p,H}$; $I = I_{c,p,H}$ - удельная теплоемкость при постоянном давлении, концентрации и магнитном поле.

Будем считать, что отклонения величин от некоторых средних значений малы, поэтому в формулах (1.7) и (1.8) и далее коэффициенты при $\nabla c, \nabla T, \nabla H^2, \bar{g}$ будем считать постоянными величинами, соответствующими некоторым средним значениям концентрации c_0 , температуры T_0 и магнитного поля $\langle \bar{H} \rangle$. Выражение для потоков \bar{I} и \bar{q} принимают вид:

$$\begin{aligned} \bar{I} &= -r_0 D (\nabla c + a \nabla T + k_H \nabla H^2 + k_g \bar{g}), \\ \bar{q} &= -(x + a DN') \nabla T - DN' \nabla c - k_H DN' \nabla H^2 - k_g DN' \bar{g}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

В формулах (1.9) вместо кинетических коэффициентов L_{11}, L_{12}, L_{22} введены другие параметры:

коэффициент диффузии:

$$D = -\frac{1}{r_0} T_0 L_{11} x_c,$$

коэффициент теплопроводности:

$$x = T_0^2 L_{11}^{-1} (L_{12}^2 - L_{22} L_{11}),$$

термодиффузионное отношение:

$$k_T = (L_{11} x_c)^{-1} (T_0 L_{11} x_T + T_0 L_{12}),$$

а также следующие параметры:

$$\begin{aligned} a &= k_T / T_0, \quad N' = r_0 L_{11}^{-1} (T_0 L_{12} + L_{11} x), \quad k_H = \\ &= (m_0 a_c) / (8pr_0 x_c), \quad k_g = b_c / x_c; \end{aligned}$$

где

$$a_c = -m_0^{-1} (\partial m / \partial c)_{T,p,H}; \quad b_c = -r_0^{-1} (\partial r / \partial c)_{T,p,H};$$

m_0 и r_0 - постоянные средние значения магнитной проницаемости и плотности. Все коэффициенты при градиентах в формулах (1.9) предполагаются постоянными.

Подставляя формулы (1.9) в третье и четвертое уравнение системы (1.1), будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} + \bar{v} \nabla c &= D \Delta c + a D \Delta T + k_H D \Delta H^2, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \bar{v} \nabla T - \frac{m_0 a_T T_0}{8pr_0 I} \left(\frac{\partial H^2}{\partial t} + \bar{v} \nabla H^2 \right) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{T_0 b_T}{I} (\bar{v} \bar{g}) &= \left[c + a^2 DN \right] \Delta T + \\ &+ a DN \Delta c + a k_H DN \Delta H^2. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Здесь $b_T = -r_0^{-1} (\partial r / \partial T)_{c,p,H}$; $c = k / r_0 I$ - коэффициент температуропроводности; $a_T = -m_0^{-1} (\partial m / \partial T)_{c,p,H}$;

$$N = (r_0 I k_T)^{-1} (T_0 N' - r_0 x T_0 + r_0 T_0^2 x_T).$$

В уравнении притока тепла слагаемое, содержащее $\partial H^2 / \partial t$, надо учитывать в случае переменного магнитного поля, например, в задачах, в которых в качестве модулируемого параметра берется магнитное поле.

Найдем теперь необходимые условия равновесия среды. Взяв *rot* от обеих частей уравнения (1.6), будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{8p} \left[\left(\frac{\partial m}{\partial c} \right)_{T,p,H} \nabla c + \left(\frac{\partial m}{\partial p} \right)_{c,T,H} r \bar{g} + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial m}{\partial T} \right)_{c,p,H} \nabla T \right] \times \nabla H^2 + \\ \left. + \left[\left(\frac{\partial r}{\partial T} \right)_{c,p,H} \nabla T + \left(\frac{\partial r}{\partial c} \right)_{T,p,H} \nabla c \right] \times \bar{g} = 0. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Из формулы (1.11) следует, что механическое равновесие в среде возможно в случае когда $(\partial m / \partial p)_{c,T,H} = 0$, $T = const$, $c = const$, либо в случае, когда векторы $\nabla c, \nabla T, \nabla H^2, \bar{g}$ параллельны. Возможны и другие случаи равновесия, когда эти векторы не обязательно вертикальны, но выбраны так, что выполняется условие (1.11). Далее ограничимся случаем, когда векторы $\nabla c, \nabla T, \nabla H^2, \bar{g}$ вертикальны.

Линеаризуя уравнения (1.1) и (1.10) по малым конвективным возмущениям и предполагая, что $(\partial m / \partial H)_{c,p,T} = 0$, имеем:

$$\begin{aligned} r_0 \frac{d\bar{v}}{dt} &= -\nabla p' + h_0 \Delta \bar{v} - \frac{m_0}{8p} (a_c c' + a_T T') \bar{G} - \\ &- r_0 (b_c c' + b_T T') \bar{g}; \quad \text{div} \bar{v} = 0; \\ \frac{\partial c'}{\partial t} + \bar{v} \nabla c' &= D \Delta c' + a D \Delta T'; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T'}{\partial t} + \bar{v} \nabla T' - \frac{m_0 a_T T_0}{8pr_0 I} (\bar{v} \bar{G}) - \frac{b_T T_0}{I} (\bar{v} \bar{g}) = \\ = \left[c + a^2 DN \right] \Delta T' + a DN \Delta c'. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Здесь $\bar{G} = \nabla H^2$ градиент магнитного поля, предполагаемый постоянной заданной величиной; c', T' - отклонения концентрации и темпера-

туры от постоянных средних значений c_0 и T_0 .

В случае $\bar{G} = const$ из уравнений (1.11), (1.12) следует, что необходимым условием равновесия является постоянство и вертикальность градиентов температуры и концентрации:

$$\nabla T' = -A\bar{k}, \nabla c' = -B\bar{k}. \quad (1.13)$$

Здесь \bar{k} - единичный вектор, направленный вверх вдоль оси z .

Отметим, что вышеприведенные уравнения при отсутствии магнитного поля совпадают с уравнениями работы [1].

Магнитное поле в среде можно записать в виде $\bar{H} = \bar{H}_0 + \bar{H}'$, где \bar{H}_0 - поле при $c_0 = const, T_0 = const, m_0 = const$; \bar{H}' - возмущение. Так что $\bar{G} = \bar{G}_0 + \bar{G}'$, где $\bar{G}_0 = \nabla H_0^2$, $\bar{G}' = 2\nabla(\bar{H}_0\bar{H}')$; величину \bar{G} можно считать заданной при выполнении условия $G_0 \gg G'$.

2. Уравнения конвективной диффузии. Интерес для приложений представляет случай когда температуру вдоль смеси можно считать постоянной. Конвективная диффузия несжимаемой смеси описывается первым уравнением системы (1.1) и первым уравнением (1.10), а также уравнением неразрывности $div \bar{v} = 0$ и уравнениями магнитного поля. Для решения конкретных задач необходимо также задавать соответствующие граничные условия на поверхности полости с жидкостью. Вектор потока диффузии в случае $T = const$ имеет вид:

$$\bar{I} = -r_0 D (\nabla c + k_H \nabla H^2 + k_g \bar{g}) \quad (2.1)$$

Далее будем предполагать выполненным условие $k_g g \ll k_H |\nabla H^2|$ и пренебрегать в формуле (2.1) слагаемым, связанным с полем тяжести. Движение смеси при отклонении концентрации от постоянного среднего значения описывается уравнением:

$$r_0 \left[\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \nabla) \bar{v} \right] = -\nabla p' + h_0 \Delta \bar{v} - \frac{m_0 a_c c'}{8\rho} \bar{G}_0 + \frac{m_0}{8\rho} \bar{G}' - r_0 b_c c' \bar{g}. \quad (2.2)$$

В уравнении (2.2) в отличие от уравнения (1.12) учитывается градиент магнитного поля \bar{G}' , индуцированный неоднородностью концентрации. Вводя потенциал магнитного поля $j' (\bar{H}' = -\nabla j')$, из последних двух уравнений (1.1) имеем:

$$\Delta j' + a_c (\nabla c') \bar{H}_0 - a_H \nabla (\bar{h} \nabla j') = 0. \quad (2.3)$$

Здесь $a_H = -m_0^{-1} (\partial m / \partial H)_{c,p,T}$, $\bar{h} = \bar{H}_0 / H_0$.

Полагая

$a_H = 0, \nabla c' = -B\bar{k}, \bar{H}_0 = H_0 \bar{k} (\bar{H}_0 = const)$, из формулы (2.3) находим:

$$\Delta j' = a_c B H_0. \quad (2.4)$$

Если геометрия задачи такова, что j' зависит только от z (z - вдоль вектора \bar{k}), из уравнения (2.4) следует:

$$G' = 2 |\nabla \bar{H}_0 \bar{H}'| = 2 H_0 |B a_c|.$$

Отсюда следует, что влияние градиента концентрации на магнитное поле надо учитывать в случае больших значений B .

Приведем к безразмерному виду стационарное уравнение конвективной диффузии:

$$\bar{v} \nabla c = D \Delta c + k_H D \Delta H^2. \quad (2.5)$$

Введем в рассмотрение L_c - характерное расстояние, на котором происходит существенное изменение концентрации, L_H - характерное расстояние для градиента магнитного поля G, V_0 - характерную скорость, G_0 - характерный градиент магнитного поля. Обозначая безразмерные величины теми же буквами что и размерные, уравнение (2.5) можно записать в виде:

$$\bar{v} \nabla c = Pe^{-1} \Delta c + g Pe^{-1} div \bar{G}. \quad (2.6)$$

Здесь $Pe = V_0 L_c / D$ - число Пекле, $g = k_H G_0 L_c^2 / L_H$.

Если $g \ll 1$, влиянием магнитного поля на диффузию можно пренебречь. При выполнении условия $Pe \ll 1$ надо отбросить левую часть уравнения (2.6) и затем приравнять к нулю правую. Распределение концентрации в этом случае определяется уравнением:

$$Dc + g div \bar{G} = 0.$$

Рассмотрим теперь задачу о конвективном движении смеси вблизи полубесконечной вертикальной пластины, на поверхности которой происходит гетерогенная изотермическая реакция. Предполагая скорость реакции бесконечно большой, запишем граничное условие для концентрации $c = 0$ на поверхности пластины (предполагается, что реагирует первая компонента).

Концентрацию вдали от пластины обозначим через c_0 . Будем считать, что заметное изменение концентрации происходит в тонком слое вблизи пластины, так что течение имеет вид пограничного слоя. Движение жидкости вдоль пластины происходит под действием поля тяжести и градиента магнитного поля. Пренебрегая индуцированным градиентом магнитного поля, запишем уравнения движения в приближении стационарного пограничного слоя [4]:

$$\begin{aligned}
 v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= n \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + g c' \left[b_c - \frac{m_0 a_c}{8pr_0 g} G_{0z} \right]; \\
 v_x \frac{\partial c'}{\partial x} + v_z \frac{\partial c'}{\partial z} &= D \frac{\partial^2 c'}{\partial x^2}; \\
 \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{2.7}$$

Здесь z - координата вверх вдоль пластины, x - перпендикулярно к пластине; нижней кромке пластины соответствует $z = 0$; $n = h_0 / r_0$; $c' = c - c_0$; G_{0z} - компонента градиента поля.

Граничные условия:

$$\begin{aligned}
 v_x = v_z = 0, \quad c' = -c_0 \quad \text{при } x = 0; \\
 v_z = 0, \quad c' = 0 \quad \text{при } x \rightarrow \infty.
 \end{aligned}$$

В работе [4] показано, что система (2.7) может быть приведена к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Распределение концентрации имеет вид:

$$\begin{aligned}
 c = 0,7 Pr^{1/4} \left[\frac{1}{4n^2} \left(\frac{m_0 a_c G_{0z}}{8pr_0} - b_c g \right) \right]^{1/4} \times \\
 \times \frac{xc_0^{5/4}}{z^{1/4}}.
 \end{aligned}
 \tag{2.8}$$

Здесь $Pr = n/D$ - число Прандтля, предполагается что число Прандтля велико [4]. Из фор-

мул (2.1) и (2.8) следует, что плотность потока диффузии на пластину равна:

$$\begin{aligned}
 I_n = \bar{I} \bar{n} = 0,7 r_0 D Pr^{1/4} \left[\frac{1}{4n^2} \times \right. \\
 \left. \times \left(\frac{m_0 a_c G_{0z}}{8pr_0} - b_c g \right) \right]^{1/4} \times \frac{c_0^{5/4}}{z^{1/4}} + r_0 k_H D G_{0x},
 \end{aligned}$$

где G_{0x} - компонента градиента магнитного поля, \bar{n} - нормаль, направленная внутрь пластины. Таким образом, при помощи магнитного поля можно управлять диффузионными потоками на пластину, на поверхности которой происходит реакция.

Градиент приложенного магнитного поля предполагается достаточно большим по сравнению с индуцированным градиентом.

Литература

1. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости - М.: Наука, 1972. - 392 с.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. - М.: Наука, 1982. - 624 с.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. - М.: Наука, 1988. - 736 с.
4. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. - М.: ГИФМЛ, 1959. - 700

Convection of mixtures in magnetic field

N.G. Taktarov

Equations of mixtures convection and convective diffusion in a magnetic field had been obtained. The special cases had been examined including the problem solving of mixture convective motion near vertical plate with the presence of heterogeneous chemical reaction.